PROBEKLAUSUR

Sehen Sie die Aufgaben erst an, wenn Sie das Blatt bearbeiten wollen. Bearbeiten Sie das Blatt ohne Hilfsmittel, ohne in Ihren Notizen nachzusehen. Geben Sie sich zwei Stunden Zeit. Eine Musterlösung wird am 03.02.2015 ins Stud.IP eingestellt. Sie können dann feststellen, wo Sie Lücken haben. Eine Klausur ist mit Sicherheit ab der Hälfte der Punkte bestanden, hier also ab 14 Punkte.

[K0] *Kurzfragen* **[$1+1+1+1+1+1=6$ Punkte]**

Alle Fragen lassen sich in einem Satz oder mit einer Formel beantworten.

(a) Welche Größe ist bei Invarianz unter Verschiebungen erhalten?
(b) Wie ist der Tangentialvektor für eine Bahnkurve $\vec{r}(t)$ definiert?
(c) Welche Kraft gehört zum Potential $V(\vec{r}) = 1/r$?
(d) Was ist $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$?
(e) Die Matrix M erhalte alle Längen, $|M\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2$. Welche Determinante hat M ?
(f) Drücken Sie $\vec{a} \cdot \vec{b}$ allein durch Längenquadrate aus.

[K1] *Drehimpuls* **[2 Punkte]**

Begründen Sie, warum Drehimpulserhaltung eins Punktteilchens bedeutet, dass die Bewegungsbahnen eben sind.

[K2] *Drehungen* **[$2+2=4$ Punkte]**

Es bezeichne $\vec{n}$ einen Einheitsvektor, der eine Drehachse vorgibt, und α den Drehwinkel.

(a) Geben Sie für einen beliebigen Vektor $\vec{u}$ den Anteil $\vec{u}_\parallel$ parallel zu $\vec{n}$ und $\vec{u}_\perp$ senkrecht zu $\vec{n}$ an.
(b) Geben Sie den um die Drehachse $\vec{n}$ um den Winkel α gedrehten Vektor $D_{\alpha\vec{n}}\vec{u}$ an.

[K3] *Summenkonvention* **[$2+1+1=4$ Punkte]**

Für das ϵ-Symbol gilt

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\,.$$

Berechnen Sie daraus unter Beachtung der Einstein'schen Summenkonvention

(a) $\epsilon_{ijn}\epsilon_{lmn}$,
(b) $\epsilon_{imn}\epsilon_{lmn}$ und
(c) $\epsilon_{lmn}\epsilon_{lmn}$.

[K4] *Eigenwerte und Eigenvektoren* **[$2+2=4$ Punkte]**

Gegeben sei eine reelle 2×2 Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(a) Schreiben Sie $\det(M - \lambda\mathbb{1})$ als Polynom in λ und drücken Sie die Koeffizienten durch $\det(M)$ und $\mathrm{Sp}(M)$ aus.
(b) Wie lauten die Eigenwerte und wann sind sie reell?

[K5] *Kräfte und Potentiale* **[$2+2=4$ Punkte]**

Prüfen Sie, ob die folgenden Kräfte ein Potential besitzen. Falls ja, berechnen Sie das Potential und skizzieren Sie die Äquipotentiallinien in der xy-Ebene, d.h. für $z=0$..

(a) $\vec{F}(x,y,z) = (\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}, 0)$,
(b) $\vec{F}(x,y,z) = (y/z, -x/z, z^2/xy)$

Hinweis: $\partial_u \arctan(uv) = \frac{v}{1+u^2v^2}$.

[K6] *Harmonischer Oszillator* **[$2+2=4$ Punkte]**

In einem ein-dimensionalem Problem wirke eine Kraft $F = -kx$. Wie lautet die Bewegungsgleichung, wie ihre allgemeine Lösung? Bringen Sie die allgemeine Lösung in eine Form, in der nur eine einzige trigonometrische Funktion auftritt.